7Л

УДК 004.421.6

М.С. Львов
Херсонский государственный университет, г. Херсон, Украина
lvov@ksu.ks.ua

Тригонометрические вычисления в системах компьютерной математики учебного назначения

В работе изложены алгоритмы тригонометрических вычислений, основанные на построениях канонических форм. Эти алгоритмы используются при программировании стандартных задач школьного курса тригонометрии: задачи упрощения выражения, доказательства тождества, решения уравнения и неравенства.

Введение

Разработка алгоритмов алгебраических вычислений – одна из основных задач, возникающих при разработке систем компьютерной математики. Математическая модель задачи построения алгоритмов алгебраических вычислений – многосортные алгебраические системы (МАС). Практика разработки даже достаточно простых систем компьютерной математики учебного назначения (СКМУН) [1-3] показала, что реализация алгебраических вычислений нуждается в тщательном предварительном проектировании МАС путем разработки иерархий сортов МАС и спецификаций интерпретаторов многосортных алгебраических операций [4], [5].

Тригонометрия как учебная дисциплина занимает особое место. Тригонометрию изучают как отдельный раздел школьной алгебры и широко используют в приложениях. Поэтому и СКМУН должны поддерживать тригонометрические вычисления. Для реализации вычислений мы используем систему алгебраического программирования APS [6-9].

Целью данной работы является разработка методов тригонометрических вычислений, основанных на построении канонических форм тригонометрических выражений.

1 Каноническая форма целых тригонометрических выражений

Определение 1. Зафиксируем множество переменных $Variable$ и будем считать, что на $Variable$ введен линейный порядок. Целыми тригонометрическими атомами (функциями) будем называть выражения вида $Sin(X)$, $Cos(Y)$, где X, Y – линейные комбинации переменных и константы Pi с рациональными коэффициентами (аргументы тригонометрических функций). Векторное пространство аргументов тригонометрических атомов обозначим через $TArg$. Векторное пространство линейных комбинаций переменных с рациональными коэффициентами обозначим через $TArg0$.

Тригонометрическим мономом (Т-мономом) будем называть произведение нескольких тригонометрических атомов. Полугруппу Т-мономов обозначим через $TMon$. Целым тригонометрическим выражением (Т-полиномом) будем называть линейную комбинацию Т-мономов с коэффициентами из некоторого расширения $TCoef$ поля рациональных чисел Rat. На множестве Т-полиномов определены операции кольца и умножения на константу, то есть операции линейной алгебры. Эту алгебру обозначим через $TPol$.

Замечание. Точное определение Т-полинома в терминах алгебраического программирования задается спецификациями алгебр аргументов, тригонометрических функций, поля коэффициентов и собственно алгебры Т-полиномов.

Конструктивная реализация алгебры Т-полиномов. Рассмотрим атом Fi(a, b, X), который определяется формулой

$$Fi(a,b,X) = aCos(X) + bSin(X), a,b \in TCoef, X \in TArg0. \quad (1)$$

Для $X \in CArg$ пусть

$$X = c_1x_1 + ... + c_nx_n + c_0\pi,\ c_i \in Rat,\ x_i \in Variable,\ x_1 > x_2 > ... > x_n. \quad (2)$$

Введем такие обозначения: $LeadCf(X) = c_1, FreeCf = c_0$.

Теорема 1. Любой Т-полином $P(X)$ над полем $TCoef$ можно представить в виде суммы Fi-атомов

$$P(X) = Fi(a_1,b_1,X_1) + ... + Fi(a_m,b_m,X_m), \quad (3)$$

где a_j, b_j принадлежат некоторому алгебраическому расширению поля $TCoef$, причем, если $LeadCf(X_j) > 0, FreeCf(X_j) = 0$, такое представление единственно с точностью до перестановки Fi-атомов $Fi(a_j,b_j,X_j),\ j = 1,...m$.

Доказательство основано на формуле понижения степени

$$Fi(a,b,X) \cdot Fi(c,d,Y) = Fi(\frac{ac-bd}{2}, \frac{bc+ad}{2}, X+Y) + Fi(\frac{ac+bd}{2}, \frac{bc-ad}{2}, X-Y).$$

Легко видеть, что (3) – сокращенная форма записи полинома Фурье

$$Fi(a_1,b_1,X_1) + ... + Fi(a_m,b_m,X_m) = \sum_{j=1}^{m} a_jCos(X_j) + b_jSin(X_j).$$

Таким образом,

$$\sin(x) = Fi(0,1,x),\ \cos(x) = Fi(1,0,x). \quad (4)$$

Расширение поля $TCoef$ заключается в присоединении алгебраических чисел $Cos(k\pi/n), Sin(k\pi/n)$ к полю Rat. Вычисления в этих расширениях будут рассмотрены ниже. Множество выражений вида (3) обозначим $FiPol$. Алгебра $FiPol$ изоморфна алгебре $TPol$.

Основная идея тригонометрических вычислений в алгебре Т-полиномов состоит в изоморфном переходе от выражения в сигнатуре $TPol$ к выражению в сигнатуре $FiPol$ (4), построению канонической формы этого выражения в $FiPol$ и обратному переходу (1) в сигнатуру $TPol$.

2 Каноническая форма рациональных тригонометрических выражений

Определение 2. Пусть F, G – Т-полиномы от одной переменной x. Рациональное выражение $H = \frac{F}{G}$ будем называть рациональным тригонометрическим выражением (TR-выражением).

Приведя F, G к канонической форме в $FiPol$, получим:

$$H(x) = \frac{Fi(a_k,b_k,kx) + ... + Fi(a_1,b_1,x) + a_0}{Fi(c_m,d_m,mx) + ... + Fi(c_1,d_1,x) + c_0}.$$

Легко показать, что это представление не является каноническим. Зафиксируем, во-первых, поле коэффициентов $TCoef$ поля TR-выражений $TRat$. Во-вторых, определим и зафиксируем структуру этого расширения над полем $TCoef$. Пусть $TCoef = Q$ – поле рациональных чисел или некоторое его вещественное алгебраическое расширение (например, поле $Rad = RaT(\sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{p_j}, ...)$). Тогда поле $TRat = Q(Fi(a,b,kx)), a,b \in TCoef, k \in N$. Рассмотрим последовательность расширений

$$TCoef \subset TCoef\ (Cos\,(x)) \subset TCoef\ (Cos\,(x))(Sin\,(x)), \tag{5}$$

присоединяя к $Tcoef$ последовательно элементы $Cos(x)$, $Sin(x)$. Для краткости введем обозначение $TCoef = F_0, F_0(\cos(x)) = F_1, F_1(\sin(x)) = F_2 = TRat$. Тогда расширение $F_0 \subset F_1$ является трансцендентным, а расширение $F_1 \subset F_2$ – алгебраическим. Поэтому элемент H поля F_2 можно представить в виде $H = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f, g \in F_1[Sin(x)]$. Многочлены f, g записаны в виде суммы мономов от степеней $\cos^j(x)$, формулами понижения степени могут быть переписаны в многочлены от $Cos(jx)$.

$$f(x) = a_0Cos(kx) + ... + a_{k-1}Cos(x) + a_k,\ g(x) = b_0Cos(mx) + ... + b_{m-1}Cos(x) + b_m,$$

поэтому элемент $H \in F_1$ можно представить в виде:

$$H = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0Cos(kx) + ... + a_{k-1}Cos(x) + a_k}{b_0Cos(mx) + ... + b_{m-1}Cos(x) + b_m}. \tag{6}$$

При этом Т-полиномы f, g взаимно просты: $\gcd(f, g) \in F_0$. Это представление однозначно с точностью до коэффициентов: для каноничности знаменатель дроби (6) нужно нормализовать, разделив числитель и знаменатель на $lc(g) = b_0$:

$$H = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0'Cos(kx) + ... + a_{k-1}'Cos(x) + a_k'}{Cos(mx) + ... + b_{m-1}'Cos(x) + b_m'},\ a_j' = \frac{a_j}{b_0}, b_l' = \frac{b_l}{b_0}. \tag{7}$$

Полученное представление уже канонично. Далее, поскольку $Cos^2(x) + Sin^2(x) = 1$, степень расширения $F_1 \subset F_2$ равна 2. Поэтому элемент поля F_2 можно представить в виде линейного двучлена:

$$H \in F_2 \Rightarrow H = G_0Sin(x) + G_1, G_0, G_1 \in F_1. \tag{8}$$

Итак, справедлива.

Теорема 2. Канонической формой TR-выражения является его представление в виде

$$\begin{gathered} H = \frac{f_0(x)}{g_0(x)}\sin(x) + \frac{f_1(x)}{g_1(x)},\ \ f_0, g_0, f_1, g_1 \in F_1 = F_0(\cos(x)), \\ \gcd(f_0, g_0) = 1, \gcd(f_1, g_1) = 1, lc(g_0) = 1, lc(g_1) = 1 \end{gathered}. \tag{9}$$

Для решения задачи осталось привести алгоритм обращения целого тригонометрического выражения, то есть алгоритм построения канонической формы выражения вида

$$H(x) = \frac{1}{\sin(x)f(x) + g(x)},\ f(x), g(x) \in F_1 \tag{10}$$

Положим $A = f(x),\ B = g(x),\ u = Cos(x),\ v = Sin(x)$. Тогда

$$\frac{1}{vA+B} = vP + Q,\ P,Q \in F_1. \tag{11}$$

Уравнение (11) относительно P,Q решим в поле $F_2 = F_0(u,v)/\{v^2+u^2=1\}$, умножив обе части на $-vA+B$:

$$\frac{B-vA}{B^2-v^2A^2} = \frac{B-vA}{B^2-(1-u^2)A^2} = \frac{B-vA}{B^2-A^2+u^2A^2} = \frac{B}{B^2-A^2+u^2A^2} + v\frac{-A}{B^2-A^2+u^2A^2}.$$

Отсюда

$$P = \frac{B}{B^2-A^2+u^2A^2},\ Q = \frac{-A}{B^2-A^2+u^2A^2}. \tag{12}$$

Формулы (12) представляют правило обращения выражения (10).

Канонические формы TR-выражений многих переменных можно построить, используя рекурсивные представления. Пусть $X = \{x_1,...,x_k\} \subset Variable$ и $x_1 < ... < x_k$. Через F_0 обозначим поле $TCoef$, а через $F_{tr}(x)$ – поле рациональных тригонометрических выражений от переменной x над полем F. Тогда возрастающая последовательность полей

$$F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_j \subset F_{j+1} \subset ... \subset F_k,$$

в которой $F_{j+1} = F_{tr}(x_{j+1})$ определяет алгоритм построения канонических форм в поле рациональных тригонометрических выражений многих переменных.

3 Определение поля коэффициентов TR-выражений

Выше мы определили поле $TCoef$ как поле коэффициентов Т-полиномов. В простейшем случае $TCoef = Rat$. Однако даже в простых примерах тригонометрических задач школьного типа коэффициентами могут быть квадратные радикалы: $\mathrm{Sin}(\pi/4) = \sqrt{2}/2,\ \mathrm{Sin}(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

Использование поля Rad квадратных радикалов уже позволяет расширить класс тригонометрических задач, поддерживаемых программной системой. Однако наиболее приемлемым является расширение поля Rad тригонометрическими функциями от числовых аргументов вида $k\pi/n, k, n \in N$. Обозначим через $TCoef$ поле $\mathrm{Rad}(\mathrm{Sin}(k\pi/n), \mathrm{Cos}(k\pi/n), k, n \in N)$. Поскольку $Sin(\alpha) = Cos(\pi/2-\alpha)$,

$$\mathrm{TCoef} = \mathrm{Rad}(\mathrm{Cos}(k\pi/n, k, n \in N). \tag{14}$$

Поскольку число $Cos(k\pi/n)$ алгебраично, для $Cos(\pi/n)$ над полем Rat существует минимальный полином, то есть полином $P_c(x) \in Rat[x]$ минимальной степени такой, что $P_c(Cos(\pi/n)) = 0$. Преобразованиями понижения степени вида

$$Cos^k(x) = c_0Cos(kx) + c_1Cos((k-1)x) + ... + c_{k-1}Cos(x) + c_k \tag{15}$$

полиному $P_c(x)$ можно поставить в соответствие Т-полином, который естественно называть минимальным Т-полиномом числа $Cos(\pi/n)$.

Определение 3. Минимальным Т-полиномом числа $a = Cos(\pi/n), n \in N$ над полем Rat называется Т-полином минимальной степени m вида

$$T(x) = Cos(mx) + c_1 Cos((m-1)x) + ... + c_{m-1} Cos(x) + c_m, c_j \in Q, \quad (16)$$

такой, что $T(a) = 0$.

Следующая теорема устанавливает соотношение между минимальным полиномом алгебраического числа $e_n = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ и минимальным Т-полиномом его действительной части $\mathrm{Re}(e_n) = Cos(\pi/2n)$.

Теорема 3. Пусть $e_n = Cos(2\pi/n) + iSin(2\pi/n)$ – первоначальный корень степени n из единицы $P_n(z) \in Rat[z]$ – минимальный многочлен e_n над полем Rat, $T_n(x)$ – минимальный тригонометрический полином числа $re(e_n) = Cos(2\pi/n)$ над Rat и $m = \deg(P_n)$. Тогда для любого $z, |z| = 1$, имеет место соотношение

$$P_n(z) = z^{m/2} \cdot T_n(re(z)). \quad (17)$$

Доказательство мы опускаем.

Следствие. Если $P_e(z) = z^m + c_1 z^{m-1} + ... + c_{m-1} z + 1$ – минимальный полином первообразного корня $e_n = Cos(2\pi/n) + iSin(2\pi/n)$, $m = 2l$, минимальный Т-полином числа $Cos(2\pi/n)$ имеет вид

$$T(x) = 2(Cos(lx) + c_1 Cos((l-1)x) + ... + c_{l-1} Cos(x)) + c_l.$$

Таким образом, для $x = 2\pi/n$ имеет место соотношение

$$Cos(2l\pi/n) = -c_1 Cos(2(l-1)\pi/n - ... - c_{l-1} Cos(2\pi/n) - c_l/2. \quad (18)$$

Пример. Построение минимального тригонометрического полинома числа $Cos(\pi/5)$. Рассмотрим первообразный корень числа $e_{10} = Cos(2\pi/10) + iSin(2\pi/10)$. Построим минимальный многочлен числа e_{10}. Поскольку это число – корень степени 10 из 1, его характеристический многочлен равен $z^{10} - 1$.

$$z^{10} - 1 = (z^5 + 1)(z^5 - 1) = (z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)(z^5 - 1)$$

Отсюда $P_{10}(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$. Итак, $\deg(P_{10}) = m = 4$, $l = 2$.

$$T_{10}(x) = 2\cos(2x) - 2\cos(x) + 1$$

$$2\cos(2\pi/5) - 2\cos(\pi/5) + 1 = 0.$$

Формула (18) используется для построения канонической формы числового целого Т-полинома.

Определение 4. Числовым тригонометрическим полиномом называется выражение вида

$$F(Cos(k_1\pi/n_1), Cos(k_2\pi/n_2), ..., Cos(k_m\pi/n_m)),\ F(x_1, ..., x_m) \in Q[x_1, ..., x_m]. \quad (19)$$

Определение 5. Канонической формой (стандартным видом) выражения (19) называется линейная комбинация вида

$$L(F) = \sum_{j=0}^{M} c_j \cos(j\pi/n),\ M < n/2.$$

Алгоритм вычислений в поле *TCoef* редуцирует числовые Т-полиномы к канонической форме с помощью (18). Алгоритм построения минимального Т-полинома числа $\cos(2\pi/n)$ использует алгоритм построения минимального полинома первообразного корня $e_n = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ и (17).

Операция деления в поле *Tcoef*. Выше мы определили алгоритмы операций сложения, вычитания и умножения элементов поля $TCoef$. Мы выяснили, что нетривиальной для реализации является операция умножения двух элементов поля, являющихся значениями тригонометрических полиномов вида

$$T(x) = Cos(mx) + c_1 Cos((m-1)x) + ... + c_{m-1} Cos(x) + c_m, c_j \in Q$$

при $x = \frac{2\pi}{n}$. Осталось определить алгоритм операции деления двух элементов $TCoef$, то есть алгоритм вычисления коэффициентов полинома $T(x) = \frac{T_1(x)}{T_2(x)}$. Поскольку поле $TCoef$ является алгебраическим расширением поля Q, мы можем применить стандартный алгоритм, который состоит в следующем:

Находим элемент $TCoef$, обратный к $T_2(x)$. Для этого применяем расширенный алгоритм Евклида к паре полиномов $M(y), T_2(y)$, где $M(y)$ – минимальный многочлен числа $\cos(x), x = \frac{2\pi}{n}$. Расширенный алгоритм Евклида вместе с НОД(M(y),$T_2(y)$) находит такие многочлены $D_1(y), D_2(y)$, которые $D_1(y)M(y) + D_2(y)T_2(y) = НОД(M(y), T_2(y))$. Поскольку $M(y)$ неприводимый над Q и $\deg(T_2(y)) < \deg(M(y))$, имеем НОД(M(y), $T_2(y)) = 1$. Итак, $D_1(y)M(y) + D_2(y)T_2(y) = 1$. Поскольку $M(x) = 0$, $D_2(x)T_2(x) = 1$, или $D_2(x) = 1/T_2(x)$.

Этот метод можно модифицировать для тригонометрических многочленов. Для этого рассмотрим тригонометрическое тождество

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b).$$

Пусть $a = mx, b = (n-m)x$. Тогда $\cos(mx)\cos((n-m)x) = \frac{1}{2}\cos(nx) + \frac{1}{2}\cos(2m-n)x)$, или

$$\cos(nx) = (2\cos(n-m)x))\cos(mx) - \cos((2m-n)x). \qquad (20)$$

Равенство (20) используется в расширенном алгоритме Евклида для выравнивания степеней тригонометрических многочленов, старшие члены которых мы обозначаем через $\cos(nx), \cos(mx), m < n$.

Модифицированный расширенный алгоритм Евклида для Т-полиномов.

Вход: P, Q – тригонометрические многочлены от переменной *x*.

$P = c_{10}\cos(nx) + c_{11}\cos((n-1)x) + ... + c_{1n}$

$Q = \cos(mx) + c_{21}\cos((m-1)x) + ... + c_{2m}$

Выход: D, T_1 T_2 – тригонометрические многочлены от переменной *x*.

Инвариантные соотношения

$D = GCD(P,Q)$, $T_1P + T_2Q = D$

Система переписывающих правил

```
Exttriggcd = rs(P,Q,U1, V1, U2, V2, M)
{
(P, Q) = (P,Q,1,0,0,1),                 //P = 1*P + 0*Q,  Q = 0*P + 1*Q
(0,Q,U1,V1,U2,V2)=(Q, U2, V2),          //Q = НОД(P,Q), T1 = U2, T2 = V2
Deg(P) <= Deg(Q) →
(P,Q,U1,V1,U2,V2)=(Q-M*P, P, U2-M*U1, V2-M*V1, U1, V1),
Deg(P) > Deg(Q) →(
```

```
(P,Q,U1,V1,U2,V2)=(Q, P, U2, V2, U1, V1)
};
```

Т-моном М (правило 3) вычисляется по формуле

$$M = \frac{c_{20}}{c_{10}}\cos((n-m)x),\ n = \deg(Q), m = \deg(P). \tag{21}$$

Отметим еще раз, что алгоритм *ExtTrigGcd* отличается от расширенного алгоритма Евклида для многочленов лишь формулой (21) вычисления дополнительного множителя М и интерпретацией умножения как умножения тригонометрических многочленов.

Выводы

Методы тригонометрических вычислений, основанные на построении канонических форм целых и рациональных тригонометрических выражений и использующие вычисления в поле коэффициентов $\mathrm{TCoef} = \mathrm{Rad}(\mathrm{Cos}(k\pi/n, k, n \in N)$ позволяют разрабатывать эффективные алгоритмы решения стандартных тригонометрических задач – задач на упрощения тригонометрических выражений, доказательство тригонометрических тождеств и решения тригонометрических уравнений в системах компьютерной математики учебного назначения.

Литература

1. Lvov M. Applied Computer Support of Mathematical Training / M. Lvov, A. Kuprienko, V. Volkov // Proc. of Internal Work Shop in Computer Algebra Applications. – Kiev, 1993. – P. 25-26.
2. Lvov M. AIST: Applied Computer Algebra System / M. Lvov // Proc. of ICCTE'93. – Kiev. – P. 25-26.
3. Lvov M.S. Term-VII – shkolnyaja sistema kompjuternoj algebry / M. Lvov // Kompjuter v shkole i semje. – 2004. – № 7. – С. 27-30.
4. Peschanenko V.S. Rasshyrehie standartnych modulej sistemy algebraicheskogo programmirovanija APS dlya ispolzovanija v sistemah uchebnogo naznachenija./ V.S. Peschanenko// Nauchnaja gazeta NPU im. Dragomanova. Serija № 2. Kompjuterno-orientirovannye sistemy obuchenija. Sb. Nauk. Pr. K.: NPU im. Dragomanova. – 2005. – №3 (10). – С. 206-215.
5. Lvov M.S. Sintez interpretatorov algebraichtskyh operatcij v rasshirehijayh mhogosortnyh algebr / M.S. Lvov // Vesthik Harkovskogo natcionalnogo universiteta im. Karazina. Serija «Matematicheskoje modelirovanie. Informatcionnye tehnologii». – 2009. – № 847. – С. 221-238.
6. Algebraic programming system APS (user manual) Glushkov Institute of Cybernetics, National Acad. of Sciences of Ukraine / [Letichevsky A., Kapitonova J., Volkov V., Chugajenko A., Chomenko V.]. – Kiev, Ukraine, 1998.
7. Peschanenko V.S. Ob odnom podhode k proektirovaniju algebraicheskih tipov dannyh / V.S. Peschanenko // Problemy programmirovanija. – 2006. – № 2-3. – С. 626-634.
8. Kapitonova J. Deduktivnyje sredstva sistemy algebraicheskogo programmirovanija. / J. Kapitonova, A. Letichevsky, V. Volkov // Kibernetika i sistemnyj analiz. – 2000. – № 1. – С. 17-35.
9. Tools for solving problems in the scope of algebraic programming / [Kapitonova J., Letichevsky A., Lvov M., Volkov V.] // Lectures Notes in Computer Sciences. – 1995. – № 958. – P. 31-46.

М.С. Львов

Реалізація тригонометричних обчислень в системах комп'ютерної математики навчального призначення

У роботі розглянуто алгоритми реалізації тригонометричних обчислень, основані на побудовах канонічних форм тригонометричних виразів, що застосовуються, зокрема, при програмуванні стандартних задач шкільного курсу тригонометрії: задачі спрощення тригонометричного виразу, доведення тригонометричної тотожності, розв'язання тригонометричного рівняння та нерівності.

M.S. Lvov

Trigonometric Computations in Mathematical Educational Software

The algorithms of trigonometric computations, based on the construction of canonical forms of trigonometric expressions, which are in particular used at programming of standard tasks of trigonometry school course, i.e. simplifications of expression, proving of identity, solving of equation and inequality, are considered in the work.

Статья поступила в редакцию 10.06.2011.